Gli assiomi del calcolo delle probabilità e gli assiomi per le topologie a confronto

Una teoria matematica può essere completamente formalizzata e svolta con un metodo assiomatico senza l'ausilio del linguaggio naturale, come mostra la logica matematica. Purtuttavia, *i matematici* nell'esposizione di una teoria *non rinunciano all'uso del linguaggio naturale* e combinano la derivazione formale dei teoremi –cioè la dimostrazione dei teoremi– con considerazioni discorsive e sicuramente convincenti. Il linguaggio naturale è, però, liberato da alcune sue ambiguità. P. es., nei libri *ben scritti* di topologia, si lègge «il *concetto* [primitivo] di topologia» e *non* «la *definizione* di topologia».

In questo modo, la matematica si svolge in tre momenti:

1) introduzione dei *concetti primitivi* (o *termini non definiti*)(**1**),
2) enunciazione degli *assiomi* (o *postulati*),
3) dimostrazione dei *teoremi* (attraverso le regole logiche di deduzione).

Gli assiomi sono anche detti, in modo improprio, definizioni *implicite*, perché spiegano come usare i concetti primitivi. Invece, le definizioni vere e proprie, o *esplicite*, date nel linguaggio naturale, sono una scrittura concisa, che consente di sostituire una *disposizione ordinata* di simboli o una frase con altri simboli o parole (più brevi). Si scrive:

definiendum [definendo] := *definiens* [definente]

oppure

(NOTA **1**) - I concetti primitivi sono parole del linguaggio naturale, che non hanno una definizione esplicita, ma attraverso gli assiomi si dà a essi un significato formale (e quindi una *definizione implicita*), con al più spiegazioni e precisazioni, anche con esempi, per chiarire eventuali ambiguità linguistiche. P. es., in aritmetica «*numero*» è un concetto primitivo, nella geometria euclidea lo sono «*punto*», «*retta*», «*piano*» e «*spazio*», nella teoria «ingenua» degli insiemi lo sono «*insieme*», «*elemento di un insieme*» e la *relazione di appartenenza* «$\in$».

Il metodo assiomatico è diventato un modello anche per la fisica. P. es., «*corpo*», è un concetto primitivo della meccanica, la quale si può sviluppare *per intero* a partire da pochi assiomi. In questo caso, però, i suoi teoremi non possono essere in contrasto con le osservazioni sperimentali; se lo fossero, sarebbe necessario cambiare l'elenco degli assiomi per ottenere nuovi teoremi in accordo con le osservazioni sperimentali.

$$\textit{definiendum} \text{ [definendo] } :\Leftrightarrow \textit{definiens} \text{ [definente]},$$

la scrittura da definire è il *definiendum* e la scrittura che definisce (il *definiendum*) è il *definiens* (i due punti, «:», si pongono vicino al *definiendum* e si leggono «per definizione»).

Per capire come i matematici costruiscono una teoria assiomatica mediante il linguaggio naturale, è utile un parallelismo tra i fondamenti del calcolo delle probabilità e la topologia generale (2). Le costruzioni assiomatiche del calcolo delle probabilità e della topologia generale sono, sotto molti aspetti, un'estensione della teoria degli insiemi e ciò ne permette un facile confronto.

Il lettore studioso, alla fine di questa breve nota, capirà da sé l'importanza, in una teoria matematica, di fissare nella mente i concetti primitivi prima di recitare le dimostrazioni dei teoremi. Come dice il proverbio, *chi ben comincia è a metà dell'opera.*

Calcolo delle probabilità	**Topologia generale degli insiemi astratti di punti**
‡ I concetti primitivi sono: • *prova*, • *evento* E, • σ-*algebra* (famiglia (3) di eventi) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ e • *probabilità* P su un insieme Ω, non vuoto, di natura qualsiasi ($\mathcal{P}(\Omega)$ è l'insieme delle parti di Ω).	‡ I concetti primitivi sono: • *insieme aperto* (o *aperto*) A e • *topologia* (famiglia (3) di aperti non vuota, detta anche *struttura topologica*) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ su un insieme S, non vuoto, di natura qualsiasi ($\mathcal{P}(S)$ è l'insieme delle parti di S).

(NOTA 2) - Per un discorso che superi le quattro parole di rito sui concetti primitivi e gli assiomi della matematica e, in particolare, del calcolo delle probabilità è utile la lettura di DOMENICO PICCOLO, *Statistica per le decisioni*, cap. 8, *Calcolo delle Probabilità*, Soc. Ed. «Il Mulino», Bologna 2004, pagg. 159-214.

Per la topologia è utile il libro di GIUSEPPE TALLINI, *Strutture geometriche*, Libreria Liguori Editrice, Napoli 1991. Questa è una raccolta di lezioni per gli studiosi di lingua italiana che risale al 1965, e che considera le topologie come caso particolare della categoria più generale delle strutture geometriche.

(NOTA 3) - «Un'applicazione f di S in T [(cioè $f\colon S \to T$)] si chiama anche *famiglia f di elementi di T con insieme di indici S.* Quando si usi quest'ultima terminologia, il valore dell'applicazione nell'elemento x di S si suole chiamare elemento della famiglia di indice x e, anziché con $f(x)$, si suole denotare con f_x» (FEDERICO CAFIERO, *Lezioni di analisi matematica*, parte prima, II ed. riv., Libreria Liguori Editrice, Napoli 1980, pagg. 14-15).

Concetti descritti in sequenza, con grande efficacia, dalla frase: «la *prova* genera l' *evento* [(elemento di una famiglia)] con una certa *probabilità*» (POMPILJ). In altre parole, il risultato della prova è l'evento $E \in \mathcal{F}$ al quale si assegna una certa probabilità P(4).	Concetti descritti dal significato etimologico della parola topologia –in latino *analysis situ*–, cioè *analisi del luogo geometrico* (analisi intesa in senso astratto per la natura non specificata di S).
Un *evento* E è, intuitivamente, un elemento di $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ con *speciali* proprietà «algebriche». La famiglia $\mathcal{F}$ raccoglie gli eventi con le stesse proprietà «algebriche», cioè $\mathcal{F}$ è una σ-*algebra* di Ω.	Un *aperto* A è, intuitivamente, un elemento di $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ con *speciali* proprietà «geometriche» (cioè un luogo geometrico *in senso astratto*). La famiglia $\mathscr{A}$ raccoglie gli aperti con le stesse proprietà «geometriche», cioè $\mathscr{A}$ è una topologia per S.
In generale, *non tutte* le parti di Ω sono *eventi*. La scelta della famiglia $\mathcal{F}$ di eventi dipende dal fenomeno aleatorio in Ω da studiare.	In generale, *non tutte* le parti di S sono *aperti*. La scelta della famiglia $\mathscr{A}$ di aperti dipende dalla «geometria» in S da studiare.
✠ *Definizione* 1. (*spazio campione*). L'insieme Ω *si chiama* lo *spazio campione* di tutti i risultati *possibili* di una prova.	✠ *Definizione* 1. (*insieme di sostegno*). L' insieme S *si chiama* l'*insieme di sostegno* o di *supporto* (in breve, *sostegno* o *supporto*) della struttura topologica $\mathscr{A}$.
⋊|⋉ *Assiomi per le σ-algebre di insiemi.* Gli *eventi* E_i dello spazio campione Ω sono *soltanto* gli elementi di una σ-*algebra* $\mathcal{F}$, con $\varnothing \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, per la quale valgono gli assiomi: (σ_1) $E_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{E}_i := \complement(E_i) \in \mathcal{F}$, (σ_2) $E_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i\geq 1} E_i \in \mathcal{F}$,	⋊|⋉ *Assiomi per le topologie di insiemi.* Gli aperti A_i dell'insieme di sostegno S sono *soltanto* gli elementi di una topologia $\mathscr{A}$, con $\varnothing \neq \mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$, per la quale valgono gli assiomi: (τ_1) $\mathscr{A}$ topologia per $S \Rightarrow \varnothing \in \mathscr{A}$, $S \in \mathscr{A}$, (τ_2) $A_1, A_2 \in \mathscr{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathscr{A}$, (τ_3) $\forall A_\lambda \in \mathscr{A}$, $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathscr{A}$,

(NOTA 4) - Sinonimi di «*prova*», «*evento*» e «*probabilità*» sono, rispettivamente, «*esperimento*», «*esito*» e «*caso*». Concetti descritti in sequenza, con grande efficacia, dalla frase: «l'*esperimento* ha un *esito* dipendente dal *caso*».

dove l'indice $i = 1, 2, 3, \ldots$ è *al più* numerabile (cioè è contabile, o finito o numerabile, cioè $i \in \mathrm{I} \subseteq \mathbb{N}$, ovvero $i \geqslant 1$).	dove l'indice λ è *al più* continuo (cioè o è contabile o è continuo).
Gli assiomi per le σ-algebre di insiemi *circoscrivono l'uso* dei concetti primitivi di *evento* E e di σ-*algebra* $\mathcal{F}$ su uno spazio campione Ω.	Gli assiomi per le topologie *circoscrivono l'uso* dei concetti primitivi di *aperto* A e di *topologia* $\mathcal{A}$ su un insieme di sostegno S.
✠ *Definizione* 2. (*spazio probabilizzabile*). La coppia $(\Omega, \mathcal{F})$ si chiama *spazio probabilizzabile* (o, più in generale, *misurabile*).	✠ *Definizione* 2. (*spazio topologico*). La coppia $(S, \mathcal{A})$ si chiama *spazio topologico.*
✠ *Definizione* 3. (*punti campione*). Gli elementi di Ω sono detti *punti campione* (Ω è l'insieme di tutti i risultati possibili di una prova).	✠ *Definizione* 3. (*punti dello spazio*). Gli elementi di S sono detti *punti* dello spazio topologico $(S, \mathcal{A})$. Questo equivale a confondere lo spazio topologico $(S, \mathcal{A})$ con il sostegno S.
✠ *Definizione* 4. (*eventi incompatibili*). Gli eventi E_1 e E_2 si dicono *incompatibili* se $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.	
⋊|⋉ *Assiomi di Kolmogorov* (1933). Gli assiomi di Kolmogorov circoscrivono l'uso del concetto primitivo di *probabilità* di un evento aleatorio e assegnano al concetto una misura (una funzione), cioè una valutazione numerica, cioè un numero reale. Ciò corrisponde al fatto che è *sempre possibile* istituire una relazione d'ordine (maggiore, minore o uguale) tra le probabilità di eventi differenti. Dato lo spazio probabilizzabile $(\Omega, \mathcal{F})$ il concetto primitivo di *probabilità* (o *misura di probabilità*) è descritto da una funzione P, che assegna un numero reale $P(E)$ a ogni evento E di Ω, con $E \in \mathcal{F}$, per cui val-	⊛ *Osservazione* 1. Nella Topologia non è dato un concetto di «misura» degli aperti. Ciò corrisponde al fatto che *non* è *sempre possibile* stabilire una relazione d'ordine (maggiore, minore o uguale) tra gli aperti di una topologia. ⊛ *Osservazione* 2. La Topologia prescinde dal concetto di «*distanza*» tra due punti o due aperti, che si introduce solo per particolari insiemi, attraverso la struttura di *spazio metrico*, come, p. es., in $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Dal concetto di «*aperto*» si ottiene la

gono i seguenti assiomi:

(k_1) per ogni evento E è $P(E) \geqslant 0$;

(k_2) $P(\Omega)=1$,

lo spazio campione $\boldsymbol{\Omega}$ è un evento e si dice *evento certo* ($\boldsymbol{\Omega}$ è l'insieme di tutti i risultati possibili di una prova, e si verifica sempre $\boldsymbol{\Omega}$, perché si verifica sempre uno degli eventi elementari che lo compongono);

(k_3) *se* $E_i \cap E_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$, *allora*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \quad (\textit{additività finita})$$

oppure

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} PE_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} (E_i) \quad (\textit{additività completa})$$

(cioè la probabilità dell'unione di un numero qualsiasi –finito o infinito *numerabile*– di eventi tra loro incompatibili è la somma delle probabilità dei singoli eventi).

definizione di *intorno di un punto* x (è un insieme contenente un aperto, il quale a sua volta contiene il punto stesso). L'intorno di un punto x, intuitivamente, introduce un altro modo di considerare i «luoghi geometrici» di uno spazio topologico. Non si considera la «*distanza*», ma la «*vicinanza*» dei punti x di un aperto (e quindi di un certo spazio). Questo è di fondamentale importanza in analisi matematica, dove la *definizione generale* (cioè valida per tutti gli insiemi, non solo numerici) di *limite di una applicazione* è data attraverso gli intorni.

⊛ *Osservazione* 3.

Che succede se, al contrario di quanto detto inizialmente, $S=\varnothing$? Poiché

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\},$$

si hanno solo due possibili famiglie di parti di $\mathcal{P}(\varnothing)$:

- la famiglia vuota $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ e
- la famiglia composta dal *solo* insieme vuoto $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$,

a cui corrispondono, rispettivamente, *p. def.* (si noti bene: *definizione*)

$$(\varnothing, \varnothing),$$

lo spazio topologico *vuoto* (vuoto perché $\mathcal{A} = \{\ \}$, cioè $\mathcal{A}$ non ha aperti), e

$$(\varnothing, \{\varnothing\}),$$

lo spazio topologico *dell'insieme vuoto*.

⊛ *Osservazione* 1.

Gli assiomi (k_1) e (k_2) sono evidenti, ma non (k_3).

Queste sono definizioni *ragionate*, nel senso che non inficiano l'applicazione e la validità degli assiomi per le topologie, co-

Per (k_1), non si dànno misure *negative* di probabilità di eventi, perché i risultati di una prova non si presentano un numero negativo di volte. Per (k_2), l'*evento certo* ha misura 1, che è il valore massimo della probabilità, quando si considera la totalità di tutti i risultati possibili delle prove. Per (k_3), le probabilità di eventi incompatibili si sommano.	me il lettore può facilmente verificare.
$\boxed{\Subset\|\Supset}$ *Proposizione* 1. (*caratterizzazione dell' additività finita*). In particolare, l'additività finita *equivale* a richiedere che la probabilità dell'unione di *due* eventi incompatibili è uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi. In simboli: $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \Leftrightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) +$ $+ P(E_2)$, con $E_i \cap E_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ (**5**).	

(NOTA **5**) - *Dimostrazione*. Si tratta di dimostrare una doppia implicazione.

["$\Rightarrow$"]. Se è vero che $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$, allora è vero anche per $n=2$.

["$\Leftarrow$"]. Per induzione su n.

La base dell'induzione è $n=2$, quindi $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$, che è vera per ipotesi.

Il passo induttivo (o ipotesi di induzione) per $n-1$, con $n \geqslant 3$, dice che è vera $P(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) = \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i)$,

allora considerati n elementi $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) =$

$=$ [per la definizione di unione] $=$ $P[(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) \cup E_n] =$

$=$ [base dell'induzione] $=$ $P(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) + P(E_n) =$

$=$ [ipotesi di induzione] $=$ $\sum_{i=1}^{n-1} P(E_i) + P(E_n) =$

$=$ [per la definizione di sommatoria] $= \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$. □

⊛ *Osservazione* 2. Se si hanno due eventi E_1 e E_2 incompatibili (cioè disgiunti), l'evento $E_1 \cup E_2$ si verifica quando almeno una, e quindi una sola, delle due alternative mutuamente escludentisi si verifica. Ciò significa che la probabilità di $E_1 \cup E_2$ è distribuita fra E_1 e E_2, $$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2),$$ cioè vale l'additività *finita*. L'estensione di questa regola a una successione *infinita* di eventi $(n \to +\infty)$ *non è ovvia*, ed è l'assioma (k_3), il più importante.	
✠ *Definizione* 5. (*spazio di probabilità*). La terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si chiama *spazio di probabilità*.	
DA QUI SI SVILUPPA LA TEORIA PER TEOREMI E DEFINIZIONI	**DA QUI SI SVILUPPA LA TEORIA PER TEOREMI E DEFINIZIONI**
V., per ulteriori sviluppi e osservazioni, p. es., Kenneth Baclawski – Mauro Cerasoli – Gian Carlo Rota, *Introduzione alla probabilità*, Unione Matematica Italiana, Bologna 1984.	

Bologna, 2 settembre 2010